



## Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

**Prova 635/2.ª Fase**

Critérios de Classificação

12 Páginas

**2013**

### COTAÇÕES

#### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) .....	40 pontos
	<b>40 pontos</b>

#### GRUPO II

1.		
1.1. ....	15 pontos	
1.2. ....	15 pontos	
2. ....	15 pontos	
3.		
3.1. ....	15 pontos	
3.2. ....	15 pontos	
4.		
4.1. ....	15 pontos	
4.2. ....	15 pontos	
5. ....	15 pontos	
6. ....	15 pontos	
7.		
7.1. ....	15 pontos	
7.2. ....	10 pontos	
		<b>160 pontos</b>
<b>TOTAL</b> .....		<b>200 pontos</b>

**A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.**

## **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

A ausência de indicação inequívoca da versão (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

### **Itens de seleção**

#### **ESCOLHA MÚLTIPLA**

A cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

- uma opção incorreta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

### **Itens de construção**

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada etapa e a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação.

No item de composição, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea do desempenho no domínio específico da disciplina e no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação do desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa faz-se de acordo com os níveis a seguir apresentados.

<b>Níveis</b>	<b>Descritores</b>
<b>3</b>	Texto bem estruturado e linguisticamente correto*, ou com falhas esporádicas que não afetem a inteligibilidade do discurso.
<b>2</b>	Texto bem estruturado, mas com incorreções linguísticas que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso. OU Texto linguisticamente correto, mas com deficiências de estruturação que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso.
<b>1</b>	Texto com deficiências de estruturação e com incorreções linguísticas, embora globalmente inteligível.

\* Por «texto linguisticamente correto» entende-se um texto correto nos planos da sintaxe, da pontuação e da ortografia.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Na resposta aos itens de construção, caso o aluno apresente elementos em excesso face ao solicitado e tais elementos piorem a consistência da resposta e/ou afetem a caracterização do desempenho, a resposta deve ser classificada com zero pontos.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

<b>Situação</b>	<b>Classificação</b>
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 20.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível.  A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas.  À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.

Situação	Classificação
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	<p>É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto.</p> <p>O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.</p>
5. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	<p>Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista.</p> <p>Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.</p>
9. Transposição incorreta de dados do enunciado, que não altera o que se pretende avaliar com o item.	<p>Se o grau de dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade diminuir, a pontuação máxima a atribuir a esta(s) etapa(s) deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista;</li> <li>– na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade não diminuir, esta(s) deve(m) ser pontuada(s) de acordo com os critérios específicos de classificação.</li> </ul>
10. Transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	<p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>

\* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
11. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
12. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	<p>A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
13. Resolução incompleta de uma etapa.	<p>Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p>
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.</p>
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
16. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
17. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	<p>A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.</p>
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
19. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	<p>A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.</p>
20. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;</li> <li>– nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	A	D	B	A	C	A
Versão 2	A	D	B	B	C	A	D	C

### GRUPO II

1.1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

#### 1.º Processo

- Determinar  $z_1$  na forma algébrica ..... 2 pontos
  - Escrever  $i^{22} = -1$  ..... 1 ponto
  - Obter  $z_1$  na forma algébrica ..... 1 ponto
- Determinar  $i z_1$  na forma trigonométrica ..... 4 pontos
  - Indicar o módulo de  $z_1$  ..... 1 ponto
  - Indicar um argumento de  $z_1$  ..... 1 ponto
  - Escrever  $i$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto
  - Obter  $i z_1$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto
- Calcular  $z_2$  na forma trigonométrica ..... 3 pontos
  - Escrever  $-2 = 2 \operatorname{cis} \pi$  ..... 1 ponto
  - Efetuar a divisão na forma trigonométrica ..... 2 pontos
- Referir que  $(z_2)^n$  é um número real negativo sse  $\arg((z_2)^n) = \pi + 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$  (**ver nota**) ..... 3 pontos
- Obter  $n = -6 + 12k$  com  $k \in \mathbb{Z}$  ..... 1 ponto
- Obter o valor de  $n$  ..... 2 pontos

#### 2.º Processo

- Determinar  $z_1$  na forma algébrica ..... 2 pontos
  - Escrever  $i^{22} = -1$  ..... 1 ponto
  - Obter  $z_1$  na forma algébrica ..... 1 ponto

Determinar $i z_1$ na forma algébrica .....	2 pontos
Calcular $z_2$ na forma algébrica .....	3 pontos
Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador .....	1 ponto
Efetuar a multiplicação do numerador .....	1 ponto
Efetuar a multiplicação do denominador .....	1 ponto
Escrever $z_2$ na forma trigonométrica .....	2 pontos
Indicar um argumento de $z_2$ .....	1 ponto
Indicar o módulo de $z_2$ .....	1 ponto
Referir que $(z_2)^n$ é um número real negativo sse $\arg((z_2)^n) = \pi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ ( <b>ver nota</b> ) .....	3 pontos
Obter $n = -6 + 12k$ com $k \in \mathbb{Z}$ .....	1 ponto
Obter o valor de $n$ .....	2 pontos
<b>Nota</b> – Se o examinando escrever uma condição considerando que $(z_2)^n$ é um número real OU escrever uma condição considerando que $(z_2)^n$ é um número real positivo, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.	

**1.2.** ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Escrever $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ .....	1 ponto
Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ .....	1 ponto
Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador .....	2 pontos
Efetuar a multiplicação do numerador .....	2 pontos
Efetuar a multiplicação do denominador .....	2 pontos
Escrever $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .....	1 ponto
Escrever $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$ .....	1 ponto
Escrever $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ .....	1 ponto
Obter $(-\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha))$ .....	1 ponto
Escrever $\text{cis}(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$ .....	2 pontos
Concluir o pretendido .....	1 ponto

**2.º Processo**

Escrever $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ .....	1 ponto
Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ .....	1 ponto
Escrever $\cos \alpha + i \sin \alpha = \text{cis } \alpha$ .....	1 ponto
Escrever $-\cos \alpha + i \sin \alpha = \text{cis}(\pi - 2\alpha) \times \text{cis } \alpha$ .....	4 pontos
Escrever $\text{cis}(\pi - 2\alpha) \times \text{cis } \alpha = \text{cis}(\pi - \alpha)$ .....	4 pontos
Escrever $\text{cis}(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)$ .....	2 pontos
Escrever $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ .....	1 ponto
Concluir o pretendido .....	1 ponto

2. .... 15 pontos

Seja  $C$  o acontecimento «sair o número 3».

Podem ser admitidas outras designações para o acontecimento.

Escrever  $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B})$  ..... 1 ponto

Escrever  $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$  ..... 1 ponto

Obter  $P(\overline{A \cup B}) - P(A \cap B) = 1 - 2P(A \cap B)$  ..... 2 pontos

Calcular  $P(A \cap B)$  ..... 2 pontos

Escrever  $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  ..... 1 ponto

Calcular  $P(A)$  ..... 3 pontos

Referir que  $P(A) = P(C) + P(A \cap B)$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter  $P(C)$  ..... 3 pontos

3.1. .... 15 pontos

Determinar o número de jornalistas do sexo feminino OU determinar o número de jornalistas do sexo masculino ..... 3 pontos

Indicar os valores que a variável  $Y$  pode tomar ..... 2 pontos

Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável  $Y$  ....(3 + 3 + 3)..... 9 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 1 ponto

**Nota** – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, na etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

3.2. .... 15 pontos

Na composição, são contemplados os pontos seguintes:

- explicar  ${}^{20}C_{16} \times 16!$
- explicar a razão pela qual o produto de  ${}^{20}C_{16} \times 16!$  por  ${}^8A_4$  é uma resposta correta (I);
- explicar  ${}^{20}A_8$
- explicar  ${}^{12}A_8$
- explicar a razão pela qual o produto de  ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8$  por  ${}^8A_4$  é uma resposta correta (II).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	2	3
<b>Níveis</b>	<b>5</b>	Na composição, são contemplados corretamente os cinco pontos.	13	14	15
	<b>4</b>	Na composição, são contemplados corretamente apenas quatro dos cinco pontos.	10	11	12
	<b>3</b>	Na composição, são contemplados corretamente apenas três dos cinco pontos.	7	8	9
	<b>2</b>	Na composição, são contemplados corretamente apenas dois dos cinco pontos.	4	5	6
	<b>1</b>	Na composição, é contemplado corretamente apenas um dos cinco pontos.	1	2	3

\* Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.



**4.1. .... 15 pontos**

Referir que  $f$  é contínua em  $x = 1$  sse  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  ..... 1 ponto

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  OU calcular  $f(1)$ ..... 2 pontos

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ..... 11 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x} + \text{sen}(x-1)}{1-x}$  ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 10 pontos

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$$

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$$

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x}$  ..... 1 ponto

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$$

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1 \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{-y} \text{ (ver nota) } \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$$

Referir o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x}$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ..... 1 ponto

Concluir que  $f$  não é contínua em  $x = 1$  porque  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

OU porque  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$ ..... 1 ponto

**Nota** – Se o examinando escrever  $x \rightarrow 1^+$  em vez de  $x - 1 \rightarrow 0^+$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**4.2. .... 15 pontos**

Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 3 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{3+x} + 2x}{x}$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 2 pontos

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$  ..... 10 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{3+x})$  ..... 1 ponto
- Levantar a indeterminação ..... 7 pontos
- Escrever  $\lim_{-x \rightarrow +\infty} (x e^{3+x}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{3-y})$
- (ver nota) ..... 3 pontos
- Escrever  $\lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{3-y}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-e^3}{\frac{e^y}{y}}$  ..... 3 pontos
- Referir o limite notável  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ..... 1 ponto
- Obter o valor de  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$  ..... 2 pontos
- Concluir o pretendido ..... 2 pontos
- Nota** – Se o examinando escrever  $x \rightarrow -\infty$  em vez de  $-x \rightarrow +\infty$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**5. .... 15 pontos**

- Determinar  $g''(x)$  ..... 4 pontos
- Escrever  $(\ln(e^x + 6e^{-x} + 4x))' = \frac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x}$   
(ou equivalente) ..... 1 ponto
- Obter  $g''(x)$  ..... 3 pontos
- Resolver a equação  $g''(x) = 0$  ..... 5 pontos
- Obter  $(e^x)^2 + 4e^x - 6 = 0$  ..... 2 pontos
- Reconhecer que  $e^x = -2 - \sqrt{10}$  é impossível em  $\mathbb{R}^+$  ..... 1 ponto
- Concluir que  $e^x = -2 + \sqrt{10}$  ..... 1 ponto
- Obter  $x = \ln(-2 + \sqrt{10})$  ..... 1 ponto
- Estudar a função  $g$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico ..... 5 pontos
- Referir que  $e^x + 6e^{-x} + 4x > 0$  se  $x \in \mathbb{R}^+$  ..... 1 ponto
- Concluir que  $g''$  é negativa em  $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})[$  ..... 1 ponto
- Concluir que  $g''$  é positiva em  $]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$  ..... 1 ponto
- Concluir que o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para baixo em  $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})[$  ..... 1 ponto
- Concluir que o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para cima em  $]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$  ..... 1 ponto
- Concluir que o gráfico de  $g$  tem um ponto de inflexão ..... 1 ponto

6. .... 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizado(s) na calculadora (ver notas 1 e 2) ..... 4 pontos

Referir que a ordenada do ponto  $P$ , quando a área do triângulo  $[AOP]$  é mínima, é igual ao máximo de  $f$  em  $[-1, 2]$  ..... 5 pontos

Obter a área do triângulo  $[AOP]$  ..... 6 pontos

Referir  $\overline{OA}$  ..... 2 pontos

Indicar a altura do triângulo  $[AOP]$ , relativamente à base  $[OA]$ ..... 2 pontos

Calcular a área do triângulo  $[AOP]$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizado(s) na calculadora (ver notas 1 e 2) ..... 4 pontos

Referir  $\overline{OA}$  ..... 2 pontos

Obter em função de  $x$ , abcissa do ponto  $P$ , a área do triângulo  $[AOP]$  ..... 5 pontos

Obter o valor mínimo da área do triângulo  $[AOP]$  ..... 4 pontos

**Notas:**

1. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.
2. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

7.1. .... 15 pontos

Referir que o perímetro do triângulo  $[OAB]$  é igual a  $\overline{AB} + \overline{OB} + \overline{OA}$  (ou equivalente) ..... 1 ponto

Referir que  $\overline{OA} = \overline{OB}$  ..... 1 ponto

Referir que a amplitude do ângulo  $AOA_1$  é  $\pi - \alpha$ , sendo  $A_1$  a projeção ortogonal de  $A$  sobre o eixo  $Ox$  ..... 2 pontos

Escrever  $\cos(\pi - \alpha) = \frac{3}{\overline{OA}}$  ..... 2 pontos

Obter  $\overline{OA} = \frac{-3}{\cos \alpha}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AA_1}}{3}$  ..... 2 pontos

Obter  $\overline{AA_1} = -3 \operatorname{tg} \alpha$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Referir que  $\overline{AB} = 2 \overline{AA_1}$  ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

**7.2.** ..... **10 pontos**

Identificar o declive da reta tangente ao gráfico da função  $P$  no ponto de abcissa  $\frac{5\pi}{6}$  com  $P'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  ..... 2 pontos

Determinar  $P'(x)$  ..... 6 pontos

Determinar  $(\operatorname{tg} x)'$  ..... 1 ponto

Determinar  $\left(\frac{6}{\cos x}\right)'$  ..... 3 pontos

Obter  $P'(x)$  ..... 2 pontos

Calcular  $P'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  ..... 2 pontos



## Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

Braille, Entrelinha 1,5, sem figuras nem imagens

Critérios de Classificação

12 Páginas

**2013**

### COTAÇÕES

#### GRUPO I

1. a 8. ....(8 × 5 pontos).....	40 pontos
	<b>40 pontos</b>

#### GRUPO II

1.	
1.1. ....	15 pontos
1.2. ....	15 pontos
2. ....	15 pontos
3.	
3.1. ....	15 pontos
3.2. ....	15 pontos
4.	
4.1. ....	15 pontos
4.2. ....	15 pontos
5. ....	15 pontos
6. ....	15 pontos
7.	
7.1. ....	15 pontos
7.2. ....	10 pontos
	<b>160 pontos</b>

**TOTAL ..... 200 pontos**

**A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.**

## **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

A ausência de indicação inequívoca da versão (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

### **Itens de seleção**

#### **ESCOLHA MÚLTIPLA**

A cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

- uma opção incorreta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

### **Itens de construção**

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada etapa e a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação.

No item de composição, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea do desempenho no domínio específico da disciplina e no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação do desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa faz-se de acordo com os níveis a seguir apresentados.

<b>Níveis</b>	<b>Descritores</b>
<b>3</b>	Texto bem estruturado e linguisticamente correto*, ou com falhas esporádicas que não afetem a inteligibilidade do discurso.
<b>2</b>	Texto bem estruturado, mas com incorreções linguísticas que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso. OU Texto linguisticamente correto, mas com deficiências de estruturação que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso.
<b>1</b>	Texto com deficiências de estruturação e com incorreções linguísticas, embora globalmente inteligível.

\* Por «texto linguisticamente correto» entende-se um texto correto nos planos da sintaxe, da pontuação e da ortografia.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Na resposta aos itens de construção, caso o aluno apresente elementos em excesso face ao solicitado e tais elementos piorem a consistência da resposta e/ou afetem a caracterização do desempenho, a resposta deve ser classificada com zero pontos.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

<b>Situação</b>	<b>Classificação</b>
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 20.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível.  A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas.  À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.

Situação	Classificação
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	<p>É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto.</p> <p>O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.</p>
5. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	<p>Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista.</p> <p>Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.</p>
9. Transposição incorreta de dados do enunciado, que não altera o que se pretende avaliar com o item.	<p>Se o grau de dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade diminuir, a pontuação máxima a atribuir a esta(s) etapa(s) deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista;</li> <li>– na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade não diminuir, esta(s) deve(m) ser pontuada(s) de acordo com os critérios específicos de classificação.</li> </ul>
10. Transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	<p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>

\* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.



Situação	Classificação
11. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
12. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	<p>A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>– se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
13. Resolução incompleta de uma etapa.	<p>Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</p>
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.</p>
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
16. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
17. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	<p>A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.</p>
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
19. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	<p>A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.</p>
20. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;</li> <li>– nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

<b>Itens</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>A</b>

### GRUPO II

1.1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

#### 1.º Processo

Determinar  $z_1$  na forma algébrica ..... 2 pontos

    Escrever  $i^{22} = -1$  ..... 1 ponto

    Obter  $z_1$  na forma algébrica ..... 1 ponto

Determinar  $iz_1$  na forma trigonométrica ..... 4 pontos

    Indicar o módulo de  $z_1$  ..... 1 ponto

    Indicar um argumento de  $z_1$  ..... 1 ponto

    Escrever  $i$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto

    Obter  $iz_1$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Calcular  $z_2$  na forma trigonométrica ..... 3 pontos

    Escrever  $-2 = 2cis\pi$  ..... 1 ponto

    Efetuar a divisão na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Referir que  $(z_2)^n$  é um número real negativo sse  $\arg((z_2)^n) = \pi + 2k\pi$   
com  $k \in \mathbb{Z}$  (**ver nota**) ..... 3 pontos

Obter  $n = -6 + 12k$  com  $k \in \mathbb{Z}$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $n$  ..... 2 pontos

#### 2.º Processo

Determinar  $z_1$  na forma algébrica ..... 2 pontos

    Escrever  $i^{22} = -1$  ..... 1 ponto

    Obter  $z_1$  na forma algébrica ..... 1 ponto

Determinar $i z_1$ na forma algébrica .....	2 pontos
Calcular $z_2$ na forma algébrica .....	3 pontos
Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador .....	1 ponto
Efetuar a multiplicação do numerador .....	1 ponto
Efetuar a multiplicação do denominador .....	1 ponto
Escrever $z_2$ na forma trigonométrica .....	2 pontos
Indicar um argumento de $z_2$ .....	1 ponto
Indicar o módulo de $z_2$ .....	1 ponto
Referir que $(z_2)^n$ é um número real negativo sse $\arg((z_2)^n) = \pi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ ( <b>ver nota</b> ) .....	3 pontos
Obter $n = -6 + 12k$ com $k \in \mathbb{Z}$ .....	1 ponto
Obter o valor de $n$ .....	2 pontos
<b>Nota</b> – Se o examinando escrever uma condição considerando que $(z_2)^n$ é um número real OU escrever uma condição considerando que $(z_2)^n$ é um número real positivo, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.	

**1.2.** ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Escrever $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ .....	1 ponto
Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ .....	1 ponto
Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador .....	2 pontos
Efetuar a multiplicação do numerador .....	2 pontos
Efetuar a multiplicação do denominador .....	2 pontos
Escrever $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .....	1 ponto
Escrever $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$ .....	1 ponto
Escrever $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ .....	1 ponto
Obter $(-\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha))$ .....	1 ponto
Escrever $\text{cis}(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$ .....	2 pontos
Concluir o pretendido .....	1 ponto

**2.º Processo**

Escrever $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ .....	1 ponto
Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ .....	1 ponto
Escrever $\cos \alpha + i \sin \alpha = \text{cis } \alpha$ .....	1 ponto
Escrever $-\cos \alpha + i \sin \alpha = \text{cis}(\pi - 2\alpha) \times \text{cis } \alpha$ .....	4 pontos
Escrever $\text{cis}(\pi - 2\alpha) \times \text{cis } \alpha = \text{cis}(\pi - \alpha)$ .....	4 pontos
Escrever $\text{cis}(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)$ .....	2 pontos
Escrever $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ .....	1 ponto
Concluir o pretendido .....	1 ponto

2. .... 15 pontos

Seja  $C$  o acontecimento «sair o número 3».

Podem ser admitidas outras designações para o acontecimento.

Escrever  $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B})$  ..... 1 ponto

Escrever  $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$  ..... 1 ponto

Obter  $P(\overline{A \cup B}) - P(A \cap B) = 1 - 2P(A \cap B)$  ..... 2 pontos

Calcular  $P(A \cap B)$  ..... 2 pontos

Escrever  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  ..... 1 ponto

Calcular  $P(A)$  ..... 3 pontos

Referir que  $P(A) = P(C) + P(A \cap B)$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter  $P(C)$  ..... 3 pontos

3.1. .... 15 pontos

Indicar os valores que a variável  $Y$  pode tomar ..... 2 pontos

Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável  $Y$  ....(4 + 4 + 4)..... 12 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 1 ponto

**Nota** – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, na etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

**3.2.** ..... **15 pontos**

Na composição, são contemplados os pontos seguintes:

- explicar  ${}^{20}C_{16} \times 16!$
- explicar a razão pela qual o produto de  ${}^{20}C_{16} \times 16!$  por  ${}^8A_4$  é uma resposta correta (I);
- explicar  ${}^{20}A_8$
- explicar  ${}^{12}A_8$
- explicar a razão pela qual o produto de  ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8$  por  ${}^8A_4$  é uma resposta correta (II).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	2	3
<b>Níveis</b>	<b>5</b>	Na composição, são contemplados corretamente os cinco pontos.	13	14	15
	<b>4</b>	Na composição, são contemplados corretamente apenas quatro dos cinco pontos.	10	11	12
	<b>3</b>	Na composição, são contemplados corretamente apenas três dos cinco pontos.	7	8	9
	<b>2</b>	Na composição, são contemplados corretamente apenas dois dos cinco pontos.	4	5	6
	<b>1</b>	Na composição, é contemplado corretamente apenas um dos cinco pontos.	1	2	3

\* Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

**4.1. .... 15 pontos**

Referir que  $f$  é contínua em  $x = 1$  sse  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  ..... 1 ponto

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  OU calcular  $f(1)$ ..... 2 pontos

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ..... 11 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x} + \text{sen}(x-1)}{1-x}$  ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 10 pontos

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$$

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$$

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x}$  ..... 1 ponto

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$$

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{-y} \text{ (ver nota) } \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$$

Referir o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x}$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ..... 1 ponto

Concluir que  $f$  não é contínua em  $x = 1$  porque  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

OU porque  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$ ..... 1 ponto

**Nota** – Se o examinando escrever  $x \rightarrow 1^+$  em vez de  $x - 1 \rightarrow 0^+$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**4.2. .... 15 pontos**

Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 3 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{3+x} + 2x}{x}$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 2 pontos

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$  ..... 10 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{3+x})$  ..... 1 ponto
- Levantar a indeterminação ..... 7 pontos
- Escrever  $\lim_{-x \rightarrow +\infty} (x e^{3+x}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{3-y})$
- (ver nota) ..... 3 pontos
- Escrever  $\lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{3-y}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-e^3}{\frac{e^y}{y}}$  ..... 3 pontos
- Referir o limite notável  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ..... 1 ponto
- Obter o valor de  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$  ..... 2 pontos
- Concluir o pretendido ..... 2 pontos
- Nota** – Se o examinando escrever  $x \rightarrow -\infty$  em vez de  $-x \rightarrow +\infty$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**5. .... 15 pontos**

- Determinar  $g''(x)$  ..... 4 pontos
- Escrever  $(\ln(e^x + 6e^{-x} + 4x))' = \frac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x}$   
(ou equivalente) ..... 1 ponto
- Obter  $g''(x)$  ..... 3 pontos
- Resolver a equação  $g''(x) = 0$  ..... 5 pontos
- Obter  $(e^x)^2 + 4e^x - 6 = 0$  ..... 2 pontos
- Reconhecer que  $e^x = -2 - \sqrt{10}$  é impossível em  $\mathbb{R}^+$  ..... 1 ponto
- Concluir que  $e^x = -2 + \sqrt{10}$  ..... 1 ponto
- Obter  $x = \ln(-2 + \sqrt{10})$  ..... 1 ponto
- Estudar a função  $g$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico ..... 5 pontos
- Referir que  $e^x + 6e^{-x} + 4x > 0$  se  $x \in \mathbb{R}^+$  ..... 1 ponto
- Concluir que  $g''$  é negativa em  $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})[$  ..... 1 ponto
- Concluir que  $g''$  é positiva em  $]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$  ..... 1 ponto
- Concluir que o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para baixo em  $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})[$  ..... 1 ponto
- Concluir que o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para cima em  $]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$  ..... 1 ponto
- Concluir que o gráfico de  $g$  tem um ponto de inflexão ..... 1 ponto

**6. .... 15 pontos**

- Determinar as coordenadas do ponto  $A$  ..... 7 pontos
- Escrever  $f(x) = -x$  ..... 3 pontos
- Resolver a equação  $f(x) = -x$  em  $]0, +\infty[$  ..... 2 pontos
- Indicar as coordenadas do ponto  $A$  ..... 2 pontos
  
- Determinar a área do triângulo  $[OAB]$  ..... 8 pontos
- Escrever uma expressão que permita calcular a área do triângulo  $[OAB]$  ..... 2 pontos
- Indicar a medida do comprimento da base ..... 2 pontos
- Indicar a medida do comprimento da altura ..... 2 pontos
- Obter a área do triângulo  $[OAB]$  ..... 2 pontos

**7.1. .... 15 pontos**

- Referir que o perímetro do triângulo  $[OAB]$  é igual a  $\overline{AB} + \overline{OB} + \overline{OA}$  (ou equivalente) ..... 1 ponto
- Referir que  $\overline{OA} = \overline{OB}$  ..... 1 ponto
- Referir que a amplitude do ângulo  $AOA_1$  é  $\pi - \alpha$ , sendo  $A_1$  a projeção ortogonal de  $A$  sobre o eixo  $Ox$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\cos(\pi - \alpha) = \frac{3}{OA}$  ..... 2 pontos
- Obter  $\overline{OA} = \frac{-3}{\cos \alpha}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Escrever  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AA_1}}{3}$  ..... 2 pontos
- Obter  $\overline{AA_1} = -3 \operatorname{tg} \alpha$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Referir que  $\overline{AB} = 2 \overline{AA_1}$  ..... 1 ponto
- Concluir o pretendido ..... 2 pontos

**7.2. .... 10 pontos**

- Identificar o declive da reta tangente ao gráfico da função  $P$  no ponto de abscissa  $\frac{5\pi}{6}$  com  $P'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  ..... 2 pontos
- Determinar  $P'(x)$  ..... 6 pontos
- Determinar  $(\operatorname{tg} x)'$  ..... 1 ponto
- Determinar  $\left(\frac{6}{\cos x}\right)'$  ..... 3 pontos
- Obter  $P'(x)$  ..... 2 pontos
- Calcular  $P'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  ..... 2 pontos