

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	15 pontos
	2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.		
	4.1.	10 pontos
	4.2.	10 pontos
	4.3.	15 pontos
5.		
	5.1.	15 pontos
	5.2.	10 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2.	10 pontos
		160 pontos

TOTAL..... 200 pontos

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar, inequivocamente, o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando, inequivocamente, a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de escolha múltipla, a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

- uma opção incorrecta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de resposta aberta, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é de zero pontos. Neste caso, não é classificado o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os alunos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas de exame nacional, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

As respostas aos itens de resposta aberta que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas, se o seu conteúdo for considerado cientificamente válido e estiver adequado ao solicitado. Nestes casos, os elementos cientificamente válidos devem ser classificados, seguindo-se procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas», por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	<p>A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> - se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; - se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> - se as correcções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; - nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos) **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	D	A	D	C	B	A
Versão 2	B	C	A	D	A	B	C	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1.1. **15 pontos**

Escrever o numerador da fracção na forma algébrica 5 pontos

Escrever $z_1^4 = (\sqrt{2})^4 \operatorname{cis}(\pi)$ 3 pontos

Escrever $4 \operatorname{cis}(\pi) = -4$ 1 ponto

Obter $-4 + 4i$ 1 ponto

Calcular $\frac{-4 + 4i}{i}$ na forma algébrica 5 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por $(-i)$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $4 + 4i$ 3 pontos

Calcular $4 + 4i$ na forma trigonométrica 4 pontos

Determinar $|w|$ 2 pontos

Indicar $\arg w = \frac{\pi}{4}$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever o resultado na forma pedida $\left(w = \sqrt{32} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right)$ 1 ponto

1.2. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Calcular o raio da circunferência 10 pontos

Escrever z_1 na forma algébrica 4 pontos

Calcular $z_2 - z_1$ ou $z_1 - z_2$ 3 pontos

Calcular $|z_2 - z_1|$ (ou equivalente) 3 pontos

Apresentar a condição pedida (**ver nota**) 5 pontos

2.º Processo:

Representar a imagem geométrica de z_2 no plano ou indicar as coordenadas.. 1 ponto

Representar a imagem geométrica de z_1 no plano ou indicar as coordenadas .. 5 pontos

Determinar a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 ($\sqrt{5}$) ... 4 pontos

Apresentar a condição pedida (**ver nota**) 5 pontos

Nota – Caso o examinando não determine o raio da circunferência, mas escreva a condição

$|z - z_2| = r$, ou equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de 2 pontos.

Caso o examinando escreva $|z - z_2| \leq \sqrt{5}$, ou equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de 3 pontos.

2.1. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Construir uma tabela de dupla entrada para a variável X (ou equivalente)..... 5 pontos

Indicar os valores que a variável X pode tomar ($\{-3, -2, -1, 0, 1\}$) 3 pontos

Indicar a probabilidade de cada um dos valores da variável X 5 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) 2 pontos

2.º Processo:

Indicar os valores que a variável X pode tomar ($\{-3, -2, -1, 0, 1\}$) 3 pontos

Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável X (2+2+2+2+2). 10 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) 2 pontos

Nota – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, na etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

2.2. 15 pontos

A composição deve abordar os seguintes pontos:

1. Referir que a probabilidade pedida é $\frac{1}{6}$ (ou equivalente).
2. Explicar o significado de $P(L | J)$ no contexto da situação descrita (probabilidade de o ponto Q pertencer ao 3.º quadrante, sabendo que o número saído no dado A é negativo) (**ver nota**).
3. Referir que, para Q pertencer ao 3.º quadrante, o número saído no dado B tem de ser -1 (**ver nota**).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais, e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa		Níveis*			
		1	2	3	
Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina					
Níveis	4	A composição aborda, correctamente, os três pontos.	13	14	15
	3	A composição aborda, correctamente, apenas dois dos três pontos.	9	10	11
	2	A composição aborda, correctamente, apenas o ponto 2 ou apenas o ponto 3.	5	6	7
	1	A composição aborda, correctamente, apenas o ponto 1.	3	3	3

* Descritores apresentados nos critérios gerais.

Nota – Se o examinando apresentar uma explicação equivalente, considerada cientificamente válida, os elementos de resposta devem ser pontuados seguindo-se os mesmos procedimentos previstos nos descritores apresentados.

3. 15 pontos

Apresenta-se, a seguir, um exemplo de resposta (**ver nota**).

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\bar{A} | B) &= \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{(P(A) + P(B) - P(A \cap B)) - (P(B) - P(A \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \end{aligned}$$

De acordo com o exemplo apresentado, a resposta do examinando deve incluir a aplicação das propriedades seguintes:

- propriedade relativa à probabilidade condicionada $\left(P(\bar{A} | B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \right)$
- propriedade relativa à probabilidade da reunião de acontecimentos $\left(P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \right)$
- propriedade relativa à probabilidade da intersecção do acontecimento contrário de A com o acontecimento B ou um diagrama que a ilustre claramente.

Níveis	Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina	Pontuação
4	O examinando aplica, correctamente, as três propriedades e conclui o pretendido.	15
3	O examinando aplica, correctamente, as três propriedades, mas não conclui o pretendido.	11
2	O examinando aplica, correctamente, apenas duas propriedades.	7
1	O examinando aplica, correctamente, apenas uma propriedade.	3

Nota – Se o examinando apresentar uma resposta equivalente, considerada cientificamente válida, os elementos de resposta devem ser pontuados seguindo-se os mesmos procedimentos previstos nos descritores apresentados.

4.1. 10 pontos

Estudar a função f quanto à existência de assimptotas oblíquas do seu gráfico (**ver nota**).

Determinar m 5 pontos

Escrever $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 1 ponto

Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 4 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{\ln x}{x} \right)$ 1 ponto

Referir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 2 pontos

Obter $m = \frac{1}{5}$ 1 ponto

Averiguar a existência de b 3 pontos

Escrever $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{5}x \right)$ 1 ponto

Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{5}x \right)$ 2 pontos

Concluir que o gráfico de f não tem assimptotas oblíquas 2 pontos

Nota – Se o examinando calcular outro(s) limite(s) para além dos indicados, a classificação a atribuir a este item deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se, da aplicação desta nota, resultar uma classificação negativa, este item deve ser classificado com zero pontos.

4.2. **10 pontos**

- Determinar f' 3 pontos
- Determinar $\left(\frac{1}{5}x\right)'$ 1 ponto
- Determinar $(\ln x)'$ 1 ponto
- Escrever a expressão de f' 1 ponto
- Determinar o zero de f' 2 pontos
- Estudar o sinal de f' , com recurso a um quadro (**ver nota**) 4 pontos
 - Primeira linha do quadro 1 ponto
 - Sinal de f' 1 ponto
 - Relação entre o sinal de f' e a monotonia de f 1 ponto
 - Assinalar o extremo relativo de f 1 ponto
- Concluir que f tem um extremo relativo 1 ponto

Nota – Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

4.3. **15 pontos**

- Calcular $f(15)$ ($3 - \ln 15$) 2 pontos
- Representar graficamente f (**ver nota**) 2 pontos
- Indicar as coordenadas do ponto A $((0,50, 0,29))$ 2 pontos
- Indicar as coordenadas do ponto B $((1,75, 0,29))$ 2 pontos
- Indicar as coordenadas do ponto C $((1,00, -0,28))$ 1 ponto
- Calcular a área do triângulo $[ABC]$ 6 pontos
 - Determinar \overline{AB} 2 pontos
 - Determinar a altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[AB]$.. 2 pontos
 - Apresentar o resultado 2 pontos

Nota – Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio de f , a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5.1. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

- Justificar que a função f é contínua em $[-2, -1]$ (ver notas 1 e 2) 4 pontos
- Justificar que $f(-1) < 1,5 < f(-2)$ 6 pontos
 - Calcular $f(-2)$ 2 pontos
 - Calcular $f(-1)$ 2 pontos
 - Escrever $f(-1) < 1,5 < f(-2)$ (ou equivalente) 2 pontos
- Concluir o pretendido (ver nota 3) 5 pontos

2.º Processo:

Se o examinando considerar $g(x) = f(x) - 1,5$

- Justificar que a função g é contínua em $[-2, -1]$ (ver notas 1 e 2) 4 pontos
- Justificar que $g(-1) \times g(-2) < 0$ (ou equivalente) 6 pontos
 - Calcular $g(-2)$ 2 pontos
 - Calcular $g(-1)$ 2 pontos
 - Concluir que $g(-1) \times g(-2) < 0$ 2 pontos
- Concluir o pretendido (ver nota 3) 5 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir que a função é contínua em $[-2, -1]$, mas afirmar que a função é contínua em todo o seu domínio, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando referir que a função é contínua em $] -2, -1[$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de zero pontos.
3. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano ou do seu corolário, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 2 pontos.

5.2. 10 pontos

- Determinar f' 4 pontos
 - Determinar $(-x)'$ 1 ponto
 - Determinar $(e^{2x^3-1})'$ 2 pontos
 - Escrever a expressão de f' 1 ponto
- Calcular $f'(0)$ 2 pontos
- Calcular $f(0)$ 2 pontos
- Escrever a equação reduzida da recta pedida ($y = -x + e^{-1}$ ou equivalente) 2 pontos

6.1. **15 pontos**

Mostrar que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$, para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (**ver nota**)..... 7 pontos

Justificar que $\overline{CO} = 3 \cos(\theta)$ 4 pontos

Indicar \overline{AO} (3 m) 1 ponto

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$ 2 pontos

Mostrar que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$, para $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ 7 pontos

Escrever \overline{CO} em função de $\cos(\pi - \theta)$ 2 pontos

Escrever \overline{CO} em função de $\cos(\theta)$ 2 pontos

Indicar \overline{AO} (3 m) 1 ponto

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$ 2 pontos

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$, $\forall \theta \in]0, \pi[$ 1 ponto

Nota – Se o examinando considerar $\theta \in]0, \pi[$ em vez de $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, esta etapa deve ser pontuada com 5 pontos (3 + 1 + 1).

6.2. **10 pontos**

Escrever $3 - 3 \cos(\theta) = 3$ 2 pontos

Obter $\cos(\theta) = 0$ 2 pontos

Concluir que $\theta = \frac{\pi}{2}$ 3 pontos

Interpretar o valor obtido, no contexto da situação apresentada (**ver nota**)..... 3 pontos

Nota – Apresenta-se, a seguir, um exemplo de uma interpretação correcta: «Se o depósito tem 3 metros de altura de combustível, o ângulo θ tem amplitude igual a $\frac{\pi}{2}$ radianos ».