

---

## **Prova Escrita de Matemática A**

---

12.º ano de Escolaridade

---

**Prova 635/2.ª Fase**

11 Páginas

---

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

---

**2008**

**VERSÃO 1**

---

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

---

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

---

---

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

---

---

As cotações dos itens encontram-se na página 11.

A prova inclui um Formulário na página 4.

---

# Formulário

## Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

## Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

## Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

## Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$   
( $r$  – raio)

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

## Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho} \text{cis } \theta = \sqrt[n]{\rho} \text{cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

## Probabilidades

$\mu = x_1 P_1 + \dots + x_n P_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 P_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 P_n}$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \cong 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \cong 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \cong 0,9973$

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

## GRUPO I

- 
- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
  - Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
  - Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- 

1. Ao disputar um torneio de tiro ao alvo, o João tem de atirar sobre o alvo quatro vezes. Sabe-se que, em cada tiro, a probabilidade de o João acertar no alvo é 0,8.

Qual é a probabilidade de o João acertar sempre no alvo, nas quatro vezes em que tem de atirar?

- (A) 0,0016      (B) 0,0064      (C) 0,0819      (D) 0,4096

2. Uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tacto.

Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B.

Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?

- (A)  $\frac{1}{4}$       (B)  $\frac{1}{3}$       (C)  $\frac{3}{7}$       (D)  $\frac{2}{3}$

3. Uma linha do Triângulo de Pascal tem quinze elementos.

Quantos elementos dessa linha são inferiores a 100?

- (A) 3      (B) 4      (C) 6      (D) 8

4. Sabe-se que o ponto  $P(1, 3)$  pertence ao gráfico da função  $f(x) = 2^{ax} - 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Qual é o valor de  $a$ ?

- (A) 2      (B) 1      (C) 0      (D) -2

5. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$  e contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ . As rectas de equações  $x = -2$  e  $y = 1$  são as únicas assíntotas do gráfico de  $g$ .

Seja  $(x_n)$  uma sucessão tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty$ .

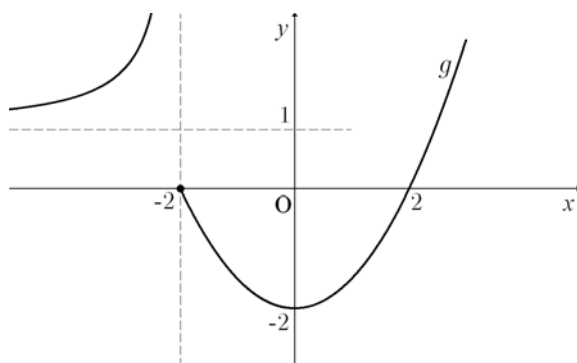


Fig. 1

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão  $(x_n)$  ?

- (A)  $-2 + \frac{2}{n}$       (B)  $-2 - \frac{1}{n}$       (C)  $1 + \frac{1}{n}$       (D)  $1 - \frac{1}{n}$

6. Na figura 2 está representada parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sendo  $y = -1$  a única assíntota do seu gráfico.

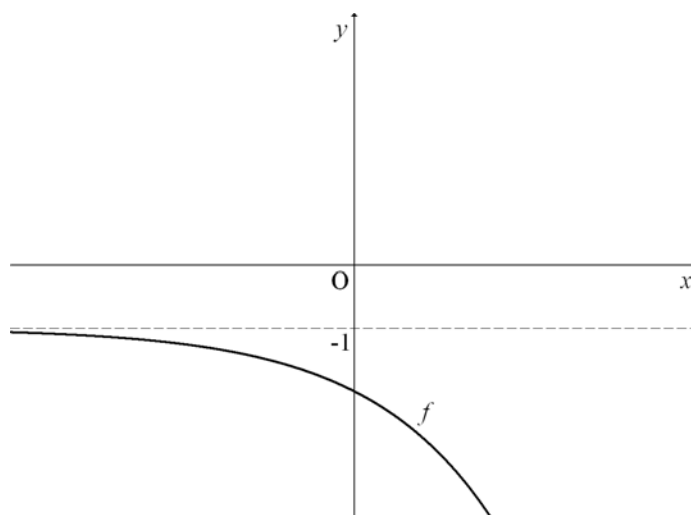


Fig. 2

Qual é o valor do  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x)}$  ?

- (A)  $-\infty$       (B)  $-3$       (C)  $-1$       (D)  $3$

7. Seja  $z$  um número complexo de argumento  $\frac{\pi}{6}$ .

Qual dos seguintes valores é um argumento de  $(-z)$ ?

- (A)  $-\frac{\pi}{6}$       (B)  $\frac{5}{6}\pi$       (C)  $\pi$       (D)  $\frac{7}{6}\pi$

8. Considere a figura 3, representada no plano complexo.

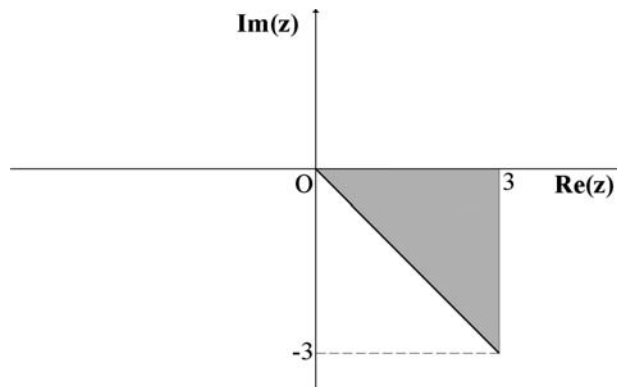


Fig. 3

Qual é a condição, em  $\mathbb{C}$ , que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

- (A)  $\operatorname{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$       (B)  $\operatorname{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$   
(C)  $\operatorname{Im}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$       (D)  $\operatorname{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

## GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_1 = 1 - i$  ( $i$  designa a unidade imaginária).

1.1. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de  $\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$ .

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Considere  $z_1$  uma das raízes quartas de um certo número complexo  $z$ .

Determine uma outra raiz quarta de  $z$ , cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.

2.1. Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos possíveis ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ).

Prove que:  $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$

( $P$  designa a probabilidade,  $\overline{A}$  designa o acontecimento contrário de  $A$  e  $\overline{B}$  designa o acontecimento contrário de  $B$ .)

2.2. Numa determinada cidade, das 160 raparigas que fizeram o exame nacional de Matemática, 65% tiveram classificação positiva, e, dos 120 rapazes que fizeram o mesmo exame, 60% também tiveram classificação positiva.

Escolhendo, ao acaso, um dos estudantes que realizaram o exame, qual é a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva?

Apresente o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas.

**Nota:**

Se o desejar, utilize a igualdade referida em 2.1. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos  $A$  e  $B$ , no contexto da situação apresentada; no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo.

3. Numa caixa temos três fichas com o número 1 e quatro fichas com o número 2, indistinguíveis ao tacto. Retiram-se, ao acaso e de uma só vez, duas fichas.

Seja  $X$  a variável aleatória: «a soma dos números inscritos nas duas fichas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável  $X$ .

Indique, justificando, o valor mais provável da variável  $X$ .

Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.



4. Considere a função  $f$ , de domínio  $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ , definida por  $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}$ , e a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = x - 2$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).

Indique as soluções inteiras da inequação  $f(x) > g(x)$ , recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda, os pontos  $A$  e  $B$ , de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

5. Na figura 4 estão representadas duas rectas paralelas, a recta  $AB$  (em que  $A$  e  $B$  são pontos fixos) e a recta  $s$ .

O ponto  $S$  é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a recta  $s$ .

Para cada posição do ponto  $S$ , seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $BAS$  e seja  $a(x)$  a área do triângulo  $[ABS]$ .

Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função  $a$ .

Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função  $a$ .

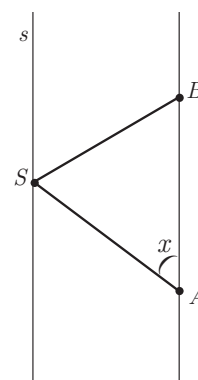


Fig. 4

Gráfico 1

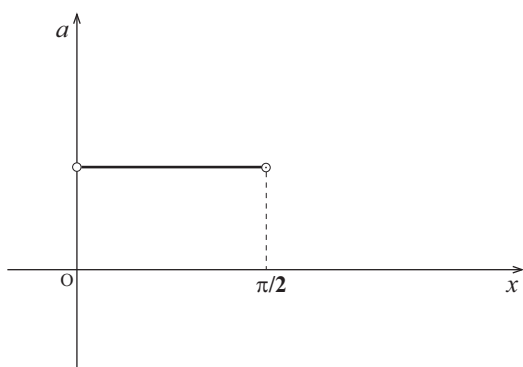


Gráfico 2

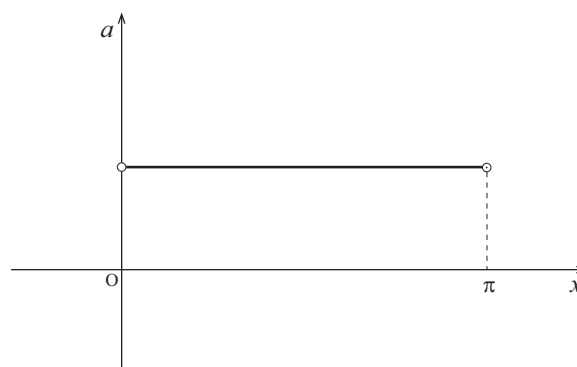


Gráfico 3

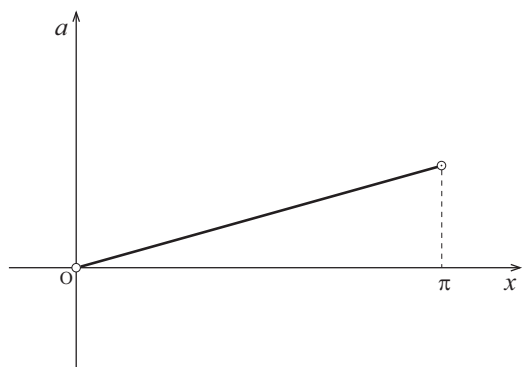
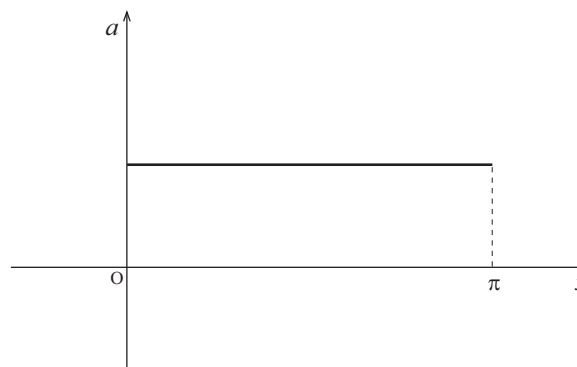


Gráfico 4



6. A massa de uma substância radioactiva diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de  $t$  horas de observação, é dada pelo modelo matemático  $M(t) = 15 \times e^{-0,02 t}$ ,  $t \geq 0$ .

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens que se seguem.

**Nota:**

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

- 6.1. Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioactiva?

Apresente o resultado em **horas e minutos**, estes arredondados às unidades.

- 6.2. Utilize o **Teorema de Bolzano** para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioactiva atingiu os 14 gramas.

7. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = 2 + \text{sen}(4x)$ .

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

**Nota:**

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

- 7.1. Determine  $g'(0)$ , recorrendo à **definição de derivada** de uma função num ponto.

- 7.2. Estude a monotonia da função  $g$ , no intervalo  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

**FIM**

## COTAÇÕES

**GRUPO I** ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

**GRUPO II** ..... **160 pontos**

**1.** ..... 30 pontos

**1.1.** ..... 15 pontos

**1.2.** ..... 15 pontos

**2.** ..... 30 pontos

**2.1.** ..... 15 pontos

**2.2.** ..... 15 pontos

**3.** ..... 15 pontos

**4.** ..... 15 pontos

**5.** ..... 15 pontos

**6.** ..... 30 pontos

**6.1.** ..... 15 pontos

**6.2.** ..... 15 pontos

**7.** ..... 25 pontos

**7.1.** ..... 10 pontos

**7.2.** ..... 15 pontos

---

**TOTAL** ..... **200 pontos**